Universität des Saarlandes
Fachrichtung Mathematik
Dr. Christian Steinhart
Friedrich Günther

Übungen zur Vorlesung „Höhere Mathematik für Ingenieure IV A“
Sommersemester 2025

Blatt 9
Abgabe bis Dienstag, 10. Juni 2025, 20 Uhr

Aufgabe 1 (4+4+2=10 Punkte): Seien

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{12} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{\sqrt{30}}{10} & \frac{\sqrt{30}}{15} & -\frac{\sqrt{30}}{10} & \frac{\sqrt{30}}{15} \\ -\frac{\sqrt{130}}{130} & -2\frac{\sqrt{130}}{65} & 2\frac{\sqrt{130}}{65} & 2\frac{\sqrt{130}}{65} & 9\frac{\sqrt{130}}{130} \\ -3\frac{\sqrt{13}}{13} & \frac{\sqrt{13}}{13} & -\frac{\sqrt{13}}{13} & -\frac{\sqrt{13}}{13} & \frac{\sqrt{13}}{13} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{100} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10000} \end{pmatrix}.$$

Dann ist $A = U\Sigma U^t$ eine Singulärwertzerlegung und $A^{-1} = A^+ = U\Sigma^{-1}U^t$ die (Pseudo)Inverse von A. Für $1 \leq k \leq 5$ seien $\Sigma_k = \operatorname{diag}(\Sigma_{1,1}, \ldots, \Sigma_{k,k}, 0, \ldots, 0)$ und A_k^+ die Pseudoinverse zu $U\Sigma_k U^t$.

(i) Seien $b = (1,2,3,4,5)^t$ und b_s eine Störung von b mit $\|b - b_s\|_2 < \varepsilon$. Für welche k ist $\|A_k^+ b_s - A_k^+ b\|_2 < 11\varepsilon$?

Hinweis: Denken Sie an die Operatornorm von A_k^+.

(ii) Für welche k ist $\|A(A_k^+ b) - b\|_2 < 32$?

Hinweis: Sie dürfen für die Berechnungen `NumPy` verwenden.

(iii) Für $\varepsilon > 0$ und $1 \leq k \leq 5$ bezeichne

$$d_k(\varepsilon) = \max_{b_s \in B(b,\varepsilon)} \|A_k^+ b_s - A_k^+ b\|_2 + \|A(A_k^+ b) - b\|_2$$

den maximal möglichen Fehler. Bestimmen Sie dasjenige k, für das $d_k(\frac{1}{10})$ minimal wird.

Aufgabe 2 (4+2+1+3=10 Punkte): Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie eine Basis für $\ker(A)$ und eine Orthonormalbasis für $\mathrm{Bild}(A)$.

(ii) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $p = \pi_{\mathrm{Bild}(A)}(b)$.

(iii) Geben Sie die Lösungsmenge von $Ax = p$ an.

(iv) Berechnen Sie A^+b.