

Übungen zur Vorlesung „Höhere Mathematik für Ingenieure IV A“
Sommersemester 2025

Blatt 10

Abgabe bis Dienstag, 17. Juni 2025, 20 Uhr

Aufgabe 1 (2+3+3+2=10 Punkte): Gegeben seien die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{A} = A - iI_2.$$

- (i) Bestimmen Sie die (komplexen) Eigenwerte von A .
- (ii) Begründen Sie, ob für einen beliebigen Startvektor v in \mathbb{R}^2 mit $\|v\| = 1$ das Potenzverfahren für A konvergiert oder nicht.
- (iii) Konvergiert das Potenzverfahren für ein v wie in Teil (ii) für \tilde{A} ? Begründen Sie wie immer Ihre Antwort.
- (iv) Sei \tilde{v} ein Eigenvektor von \tilde{A} zum Eigenwert $\tilde{\lambda}$. Geben Sie mit Hilfe von \tilde{v} und $\tilde{\lambda}$ einen zugehörigen Eigenvektor mit Eigenwert von A an.

Aufgabe 2 (3+3+3+1=10 Punkte): Für die Bearbeitung der Aufgabenteile (i)–(iii) dürfen Sie NumPy-Funktionen zur Berechnung von QR -Zerlegungen verwenden, nicht jedoch solche, die Singulärwertzerlegungen und Pseudoinverse berechnen.

- (i) Schreiben Sie eine Funktion `qr_method(A, e)`, die eine reelle $n \times n$ -Matrix A und eine Fehlerschranke e einliest, und eine wie in Satz 2.46 der Vorlesung beschriebene Zerlegung $VBV^t = A$ zurückgibt.

Verwenden Sie als Abbruchbedingung, dass die Einträge von B unter der Diagonalen betragsmäßig kleiner e sind. Brechen Sie das Iterationsverfahren nach wenigstens 300 Schritten ab.

- (ii) Schreiben Sie eine Funktion `singular_value_decomposition(A, e)`, die die unter Verwendung der Funktion `qr_method(A, e)` eine Singulärwertzerlegung von A berechnet.
- (iii) Schreiben Sie eine Funktion `pseudo_inverse(A, e)`, die die Pseudoinverse von A berechnet.
- (iv) Testen Sie ihre Funktionen mit den Eingaben

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{17}{4} & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 & \frac{11}{4} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = 10^{-6}.$$

Verwenden Sie die NumPy-Funktion `numpy.isclose()` um Ihre Ergebnisse mit denen der NumPy-internen Routinen für Singulärwertzerlegung und Pseudoinverse zu vergleichen.