

Übungen zur Vorlesung „Höhere Mathematik für Ingenieure IV A“
Sommersemester 2025

Blatt 2

Abgabe bis Dienstag, 22. April 2025, 20 Uhr

Aufgabe 1 (2+2+1+2+1+2+2=14 Punkte):

- (i) Zeigen Sie für

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{4}x^3 - x,$$

dass f auf $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ streng monoton fallend ist und folgern Sie, dass $f([-1, 1]) \subseteq [-1, 1]$.

- (ii) Zeigen Sie, dass $f|_{[-1,1]}$ eine Kontraktion ist und bestimmen Sie eine Lipschitzkonstante L .
- (iii) Bestimmen Sie den Fixpunkt von f auf $[-1, 1]$ algebraisch.
- (iv) Schreiben Sie eine Python-Funktion `A_priori_estimate(f,L,s,e)`, die für eine Kontraktion f mit Lipschitzkonstante L , Startwert s und Fehler-schranke e die Anzahl der Schritte bestimmt, die nötig sind, um sicher näher als e am tatsächlichen Fixpunkt von f zu sein.
- (v) Schreiben Sie eine Python-Funktion `banach_iteration(f,s,n)`, die mit f eine n -schrittige Banach-Iteration mit Startwert s durchführt und einen näherungsweisen Fixpunkt x zurückgibt.
- (vi) Testen Sie ihre Funktionen mit f aus (i) für $e = 0.001$ und $s = -2/3$. Wie viele Schritte sind nach A-priori-Abschätzung nötig? Welcher näherungsweise Fixpunkt wird zurückgegeben?
- (vii) Was ist die A-posteriori-Fehlerabschätzung für die Näherung aus (vi)? Wie groß ist der tatsächliche Fehler, d. h. wie groß ist der Abstand $|x - y|$, wenn x den näherungsweisen Fixpunkt und y den tatsächlichen Fixpunkt von f bezeichnet?

Aufgabe 2 (3+3=6 Punkte):

(i) Sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^3 + x^2 - 15x + 16.$$

Zeigen Sie, dass f drei Fixpunkte hat. Ist f eine Kontraktion?

(ii) Seien

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in (0, 1) \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{x} \mapsto B\mathbf{x} + \mathbf{v}$ eine Kontraktion ist. Gibt es Fixpunkte für φ ?