Universität des Saarlandes
Fachrichtung Mathematik
Dr. Christian Steinhart
Friedrich Günther

Übungen zur Vorlesung „Höhere Mathematik für Ingenieure IV B“
Sommersemester 2025

Blatt 6
Abgabe bis Freitag, 30. Mai 2025, 20 Uhr

Aufgabe 1 (1+3+2+4=10 Punkte): Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz und nicht-konstant. Wir wollen zeigen, dass dann

$$\mathrm{cl}(f(\mathbb{C})) = \left\{ \lim_{n\to\infty} z_n : (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } f(\mathbb{C}), \text{ die in } \mathbb{C} \text{ konvergiert} \right\} = \mathbb{C}.$$

Dazu gehen wir in Schritten vor.

(i) Zeigen Sie, dass $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{cl}(f(\mathbb{C}))$.

(ii) Zeigen Sie: Ist $\mathrm{cl}(f(\mathbb{C})) \subsetneq \mathbb{C}$, dann gibt es eine komplexe Zahl a und einen Radius r, sodass $B(a, r) \cap f(\mathbb{C}) = \varnothing$.

(iii) Folgern Sie: Die Funktion $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto 1/(f(z) - a)$ ist holomorph.

(iv) Wenden Sie den Satz von Liouville an um zu zeigen, dass f konstant sein muss.

Aufgabe 2 (2+2+2=6 Punkte): Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Reihen:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^5} z^n$,

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

Aufgabe 3 (1+1+1+1=4 Punkte): Sei $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$.

(i) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von f.

(ii) Zeigen Sie, dass $f(z)$ für alle z in $\mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ konvergiert.

(iii) Bestimmen Sie auf $B(0, 1)$ die Ableitung f' von f und bestimmen Sie den Konvergenzradius der Ableitung.

(iv) Geben Sie eine komplexe Zahl z_0 mit $|z_0| = 1$ an, sodass f' bei z_0 nicht konvergiert.