Universität des Saarlandes
Fachrichtung Mathematik
Dr. Christian Steinhart
Friedrich Günther

Übungen zur Vorlesung „Höhere Mathematik für Ingenieure IV B“
Sommersemester 2025

Blatt 9
Abgabe bis Freitag, 20. Juni 2025, 20 Uhr

Aufgabe 1: Untersuchen Sie die holomorphen Funktionen, die durch die folgenden Abbildungsvorschriften definiert werden, auf isolierte Singularitäten und klassifizieren Sie diese. Geben Sie im Falle eines Pols seine Ordnung an.

(i) $f\colon z \longmapsto \dfrac{1}{z^5 - 4z^3}$

(ii) $g\colon z \longmapsto \dfrac{\cos(z) - 1}{z^2}$

(iii) $h\colon z \longmapsto z\dfrac{\cos^2(z)}{\sin^2(z)}$

(iv) $j\colon z \longmapsto \exp\left(\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)\right)$

Aufgabe 2 (3+2+2+3=10 Punkte): Seien U eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, c ein Punkt in U und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, sodass $f|_{U-\{c\}}$ holomorph ist. Wir wollen zeigen: Hat f in c eine wesentliche Singularität, dann gilt für jede offene Teilmenge V von U, die c enthält, dass

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}(f(V - \{c\})) &= \left\{\lim_{n\to\infty} z_n : (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } f(V-\{c\}), \text{ die in } \mathbb{C} \text{ konvergiert.}\right\} \\ &= \mathbb{C}.\end{aligned}$$

Man sagt, das Bild von $V - \{c\}$ unter f liege dicht in $\mathbb{C}$. Dazu gehen wir in Schritten vor.

(i) Zeigen Sie: Ist $\mathrm{cl}(f(V - \{c\})) \neq \mathbb{C}$, dann gibt es einen Punkt a in $\mathbb{C}$ und einen Radius r, sodass $B(a, r) \cap f(V - \{c\}) = \varnothing$.

(ii) Folgern Sie aus dem, was Sie in (i) gezeigt haben, dass

$$g\colon V - \{c\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto \frac{1}{f(z) - a}$$

holomorph ist.

(iii) Zeigen Sie, dass g in c eine hebbare Singularität hat.

(iv) Folgern Sie, dass f in c keine wesentliche Singularität haben kann.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $\lim_{z\to c} g(z) = 0$ und $\lim_{z\to c} g(z) \neq 0$.