

Übungen zur Vorlesung „Höhere Mathematik für Ingenieure IV B“
Sommersemester 2025

Blatt 10

Abgabe bis Freitag, 27. Juni 2025, 20 Uhr

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2=10 Punkte): Seien z_0 ein Punkt der komplexen Ebene, $r > 0$ und $f: B^\bullet(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit einer isolierten Singularität in z_0 . Welche der folgenden Aussagen sind wahr oder falsch? Begründen Sie jeweils kurz, warum die Aussage wahr ist, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

- (i) Hat f eine hebbare Singularität in z_0 , dann ist $\operatorname{res}_{z_0}(f) = 0$.
- (ii) Ist $\operatorname{res}_{z_0}(f) = 0$, dann hat f eine hebbare Singularität in z_0 .
- (iii) Hat f eine Polstelle in z_0 , dann ist $\operatorname{res}_{z_0}(f) \neq 0$.
- (iv) Hat f eine mehrfache Polstelle in z_0 , d. h. eine Polstelle von Ordnung wenigstens 2, dann ist $\operatorname{res}_{z_0}(f) \neq 0$.
- (v) Hat f eine wesentliche Singularität in z_0 , dann ist $\operatorname{res}_{z_0}(f) \neq 0$.

Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte): Seien U eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, a ein Punkt in U und $f: U - \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.

- (i) Hat f in a eine Polstelle der Ordnung 1 und ist $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt

$$\operatorname{res}_a(fg) = g(a) \operatorname{res}_a(f).$$

- (ii) Ist auch $g: U - \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt für jede komplexe Zahl λ

$$\operatorname{res}_a(f + \lambda g) = \operatorname{res}_a(f) + \lambda \operatorname{res}_a(g).$$

Aufgabe 3 (2+2+2=6 Punkte):

- (i) Seien $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2 - 1$ und $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^4 - 18z^2 + 81$.
Berechnen Sie $\text{res}_3(f/g)$.
- (ii) Berechnen Sie $\text{res}_2(\exp(\sin(z)))$.
- (iii) Berechnen Sie $\text{res}_0((\cos(z) - 1)/2z^3)$.