Universität des Saarlandes
Fachrichtung Mathematik
Dr. Christian Steinhart
Friedrich Günther

Übungen zur Vorlesung „Höhere Mathematik für Ingenieure IV B“
Sommersemester 2025

Blatt 4
Abgabe bis Freitag, 16. Mai 2025, 20 Uhr

Aufgabe 1 (1+3+3+3=10 Punkte): Seien r und R positive reelle Zahlen mit $r < R$ und

$$\begin{aligned} \gamma_1 \colon [0,\pi] &\longrightarrow \mathbb{C}, & t &\longmapsto R\exp(\mathrm{i}t), \\ \gamma_2 \colon [-R,-r] &\longrightarrow \mathbb{C}, & t &\longmapsto t, \\ \gamma_3 \colon [-\pi,0] &\longrightarrow \mathbb{C}, & t &\longmapsto r\exp(-\mathrm{i}t), \\ \gamma_4 \colon [r,R] &\longrightarrow \mathbb{C}, & t &\longmapsto t. \end{aligned}$$

Schließlich bezeichne $\Gamma_{R,r} = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4$ den zugehörigen Summenweg.

(i) Begründen Sie, warum

$$\int_{\Gamma_{R,r}} \frac{\exp(\mathrm{i}z)}{z}\, dz = 0.$$

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma_2} \frac{\exp(\mathrm{i}z)}{z}\, dz + \int_{\gamma_4} \frac{\exp(\mathrm{i}z)}{z}\, dz = 2\mathrm{i} \int_r^R \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$

(iii) Berechnen Sie

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_3} \frac{\exp(\mathrm{i}z)}{z}\, dz\,.$$

Hinweis: Ist $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, dann konvergiert die gehörige Funktionenfolge $\big(f_n \colon [0,\pi] \to \mathbb{C},\, t \mapsto \exp(\mathrm{i}r\exp(\mathrm{i}t))\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig stetiger Funktionen gleichmäßig gegen $\mathbf{1} \colon [0,\pi] \to \mathbb{C},\, t \mapsto 1$.

(iv) Berechnen Sie

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1}\frac{\exp(\mathrm{i}z)}{z}\,dz\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Dreiecksungleichung für Kurvenintegrale.

Aufgabe 2 (4+4+2=10 Punkte): Eine Funktion $F\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ist stetig genau dann, wenn die Abbildungen $F^1=\mathrm{pr}_1\circ F\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ und $F^2=\mathrm{pr}_2\circ F\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ stetig sind. Punktweise Stetigkeit ist dasselbe wie Folgenstetigkeit.

(i) Seien $\gamma\colon[0,1]\to\mathbb{R}^2$ und $\mu\colon[0,1]\to\mathbb{R}^2$ Wege mit $\gamma(0)=\mu(0)=x$ und $\gamma(1)=\mu(1)=y$. Zeigen Sie, dass γ und μ homotop sind via

$$F\colon[0,1]\times[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^2,\qquad (t,s)\longmapsto(1-t)\gamma(s)+t\mu(s).$$

(ii) Zeigen Sie, dass die Wege $\mu_1\colon[0,1]\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t))^t$ und $\mu_2\colon[0,1]\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto(\cos(2\pi t)+a,\sin(2\pi t)+b)^t$ homotop sind via

$$G\colon[0,1]\times[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^2,\qquad (\varphi,t)\longmapsto\begin{pmatrix}\cos(2\pi\varphi)+ta\\ \sin(2\pi\varphi)+tb\end{pmatrix}.$$

(iii) Unter welchen Bedingungen sind μ_1 und μ_2 weiter homotop via G, wenn $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ der Bildbereich für alle Abbildungen in (ii) $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ ist?