



11. TUTORIUMSBLATT ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Tutoriumsaufgabe 1.

Sei V ein Vektorraum und $U \leq V$ ein Untervektorraum. Sei weiterhin B eine Basis von V , die eine Basis $B_U \subseteq B$ von U enthält. Zeige, dass für $b, b' \in B \setminus B_U$ aus $b \neq b'$ bereits $b + U \neq b' + U$ folgt und

$$C := \{b + U := [b] \mid b \in B \setminus B_U\}$$

eine Basis des Faktorraums V/U ist. Was heißt das für die Dimensionen, wenn V endlich-dimensional ist?

Tutoriumsaufgabe 2.

- a) Sei $U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^3$. Zeige, dass

$$C := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + U \right\}$$

eine Basis von \mathbb{R}^3/U ist.

- b) Wir betrachten den Untervektorraum

$$W := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^4.$$

Welche Dimension hat \mathbb{R}^4/W ? Gib eine Basis von \mathbb{R}^4/W an.

Tutoriumsaufgabe 3.

Wir betrachten die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } w_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Zeige, dass es eine eindeutige lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\phi(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, 2, 3$ gibt. Bestimme $D_{BB}(\phi)$ bezüglich einer Basis B Deiner Wahl.
- b) Zeige, dass es keine Abbildung $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\psi(w_i) = v_i$ für alle $i = 1, 2, 3$ gibt.

Tutoriumsaufgabe 4.

Wir betrachten die Menge der 2×2 -Matrizen $\mathbb{K}^{2 \times 2}$ als \mathbb{K} -Vektorräume.

- a) Bestimme die Darstellungsmatrix $D_{B,B}(\phi)$ der linearen Abbildung

$$\phi : \mathbb{K}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{K}^{2 \times 2}, A \mapsto A^t + A$$

bezüglich der Basis $B := (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ und bestimme den Rang der Abbildung.

- b) Bestimme die Basiswechselmatrix $D_{B,C}$ für die Basen $B \subset \mathbb{K}^{2 \times 2}$ wie in a) und

$$C := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Berechne damit $D_{B,C}(\phi)$ und $D_{C,C}(\phi)$.