

12. ÜBUNGSBLATT ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Während des gesamten Blattes bezeichnet \mathbb{K} einen Körper.

Aufgabe 1. (4P)

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Zeige, dass der Vektor $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor ist. Was ist der zugehörige Eigenwert?
- b) Bestimme die Eigenräume $\text{Eig}(A, \lambda)$ von A für $\lambda = 0, 1, 2$.

Aufgabe 2. (2 Bonuspunkte)

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und $\phi \in \text{End}(V)$ ein Endomorphismus. Seien weiterhin $v_1, \dots, v_n \in V$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Zeige, dass v_1, \dots, v_n linear unabhängig sind.

Aufgabe 3. (4P)

Sei V ein endlich dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum und $\phi, \psi \in \text{End}(V)$ zwei Endomorphismen, die miteinander kommutieren, d.h. es gilt $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$. Wir sagen ein Untervektorraum $U \subseteq V$ ist ϕ -invariant, wenn $\phi(U) \subseteq U$ gilt.

- a) Zeige, dass jeder Eigenraum $\text{Eig}(\psi, \lambda)$ von ψ bereits ϕ -invariant ist, d.h. für jeden Eigenvektor v von ψ , ist auch $\phi(v)$ ein Eigenvektor von ψ zum gleichen Eigenwert.
- b) Sei $V = U \oplus W$ eine Zerlegung in ϕ -invariante Unterräume und

$$\pi_U : V = U \oplus W \rightarrow U, \quad v = u + w \mapsto u$$

die Projektion auf U . Zeige, dass π_U Eigenräume auf Eigenräume abbildet, d.h. es gilt $\pi_U(\text{Eig}(\phi, \lambda)) = \text{Eig}(\phi|_U, \lambda)$.

- c) Seien nun ϕ und ψ diagonalisierbar. Zeige, dass sie dann simultan diagonalisierbar sind, d.h. es existiert eine Basis v_1, \dots, v_n sodass alle v_i Eigenvektoren von ϕ und ψ sind.
- d) Zeige, dass wenn zwei Endomorphismen simultan diagonalisierbar sind, dann kommutieren sie auch.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Montag den 30. 01. 2023 um 16 Uhr abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen oder im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 4. (2P+2P+2Bonuspunkte)

- a) Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Zeige mit Hilfe von Elementarmatrizen, dass $\det(A) = \det(A^t)$ gilt.
- b) Beweise die Aussage $\det(A) = \det(A^t)$ aus Teil a) durch Anwenden der Leibniz-Formel.
- c) Gegeben sei die Blockmatrix

$$M := \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \mathbf{0} & C \end{array} \right)$$

mit Matrizen $A \in \mathbb{K}^{r \times r}, B \in \mathbb{K}^{r \times s}, C \in \mathbb{K}^{s \times s}$. Zeige durch Anwenden der Leibniz-Formel, dass $\det(M) = \det(A) \cdot \det(C)$ gilt.

Aufgabe 5. (2P+2Bonuspunkte)

- a) Für drei Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Vektoren

$$v_a := \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, \quad v_b := \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}, \quad v_c := \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Determinante der Matrix $A := (v_a \mid v_b \mid v_c)$ in Abhängigkeit von a, b und c . Für welche Werte von $a, b, c \in \mathbb{R}$ bilden v_a, v_b, v_c eine Basis von \mathbb{R}^3 ?

- b) Für $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ betrachten wir die Matrix

$$V := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass $\det(V) = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$ gilt.

Hinweis: Ziehe jeder Spalte jeweils x_1 -mal die vorige Spalte ab.

Aufgabe 6. (2P)

Seien $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $B \in \mathbb{K}^{m \times k}$ zwei Matrizen. Zeige, dass $\text{Rang}(A \cdot B) \leq \min\{\text{Rang}(A), \text{Rang}(B)\}$ gilt.