

8. TUTORIUMSBLATT ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Tutoriumsaufgabe 1.

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die beiden Permutationen

$$\phi : \{1, \dots, 2n+1\} \rightarrow \{1, \dots, 2n+1\} \quad , \quad x \mapsto \begin{cases} x+1, & \text{falls } x \text{ ungerade und } x < 2n+1 \\ 2n+1, & \text{falls } x = 2n+1 \\ x-1, & \text{falls } x \text{ gerade und} \end{cases}$$

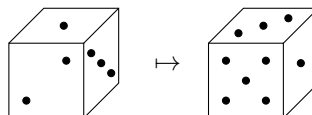
$$\psi : \{1, \dots, 2n+1\} \rightarrow \{1, \dots, 2n+1\} \quad , \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \\ x-1, & \text{falls } x \text{ ungerade und } x > 1 \\ x+1, & \text{falls } x \text{ gerade} \end{cases}$$

- Schreibe ϕ und ψ in Zykelschreibweise für $n = 2$. Was ist $\phi \circ \psi$?
- Bestimme die Ordnungen von ϕ , ψ und $\phi \circ \psi$.

Tutoriumsaufgabe 2.

Wir betrachten das Würfeln (bzw. das Drehen) eines sechsseitigen Würfels als Permutation der Seiten.

- Schreibe den folgenden Wurf als Element von S_6 :



Welche Ordnung hat die zugehörige Drehung?

- Zeige, dass jeder Wurf als Produkt von Zykeln der Länge 4 geschrieben werden kann.
- Gibt es eine Drehung des Würfels mit Ordnung 6?

Tutoriumsaufgabe 3.

Sei R ein Ring und $a \in R$ ein beliebiges Element.

- a) Zeige, dass die Multiplikationen

$$\begin{aligned} m_a : R &\rightarrow R & , & \quad x \mapsto a \cdot x \\ {}_a m : R &\rightarrow R & , & \quad x \mapsto x \cdot a \end{aligned}$$

zwei Gruppenhomomorphismen von $(R, +)$ sind.

- b) Zeige, dass m_a genau dann ein Gruppenisomorphismus ist, wenn $a \in R^\times$ eine Einheit ist.

Tutoriumsaufgabe 4.

Wir wollen den Beweis des Satzes von Lagrange anhand von zwei Beispielen nachvollziehen:

- a) Wir betrachten die Gruppe $G := \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ mit der Untergruppe $H := (3\mathbb{Z})/(12\mathbb{Z})$. Bestimme alle Nebenklassen von G/H . Wieso sind diese gleich groß? Folgere den Satz von Lagrange für G und H .
- b) Was passiert, wenn wir in a) die Gruppen $G := \mathbb{Z}/(nm\mathbb{Z})$ und $H := (n\mathbb{Z})/(nm\mathbb{Z})$ für $n, m \in \mathbb{N}$ betrachten?
- c) Bestimme die Nebenklassen von D_4 in S_4 mit der Identifizierung $D_4 \leq S_4$ von letztem Blatt. Finde eine Bijektion zwischen den Nebenklassen und folgere hieraus, dass die Anzahl der Elemente D_4 die Anzahl der Elemente in S_4 teilt. Ohne Nachzuzählen: Wie viele Nebenklassen S_4/D_4 haben wir?

Tutoriumsaufgabe 5.

- a) Zeige, dass der Ring $R := \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ mit punktweiser Addition und Multiplikation ein Ring ist und bestimme seine Charakteristik.
- b) Finde zwei Elemente $a, b \in R \setminus \{0\}$ mit $a \cdot b = 0$.
- c) Zeige, dass die Abbildung

$$\phi : \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \quad , \quad (a, b) \mapsto 6a + 10b$$

ein Ringhomomorphismus ist. Was ist sein Kern?