

4. ÜBUNGSBLATT ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Aufgabe 1. (4P)

Sei U ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n , V ein Untervektorraum von \mathbb{R}^m und $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ eine Matrix.

- a) Zeige, dass die Menge $\{Av \mid v \in V\}$ ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n ist.
- b) Zeige, dass die Menge $\{v \in \mathbb{R}^m \mid A \cdot v \in U\}$ ein Untervektorraum von \mathbb{R}^m ist.

Aufgabe 2. (4P)

Berechne sofern möglich die Produkte $A_i \cdot B_i$ und $B_i \cdot A_i$ für folgende Matrizen:

$$\text{a) } A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_1 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B_2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A_3 := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B_3 := \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } A_4 := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_4 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. (1P+2P+1P)

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zwei quadratische Matrizen. Zeige die folgenden Aussagen:

- a) Sind A und B invertierbar, dann ist auch $A \cdot B$ invertierbar.
- b) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.
- c) Ist A invertierbar, dann ist auch A^t invertierbar und es gilt $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

Aufgabe 4. (4P)

- a) Wir betrachten die reelle Matrix $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Zeige, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt.

Hinweis: Löse zuerst Aufgabe 2. Für eine Richtung hilft Tutoriumsaufgabe 5 auf dem zweiten Blatt.

- b) Finde eine Matrix $B \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ mit ganzzahligen Einträgen und $B^2 := B \cdot B = 2 \cdot I_2$.

Aufgabe 5. (1 Bonuspunkt)

Lerne das griechische Alphabet auswendig und schreibe zusätzlich Deinen Namen mit griechischen Buchstaben auf das Blatt:

klein	groß	Name	klein	groß	Name
α	A	Alpha	ν	N	Ny
β	B	Beta	ξ	Ξ	Xi
γ	Γ	Gamma	o	O	Omikron
δ	Δ	Delta	π	Π	Pi
ε, ϵ	E	Epsilon	ρ, ϱ	P	Rho
ζ	Z	Zeta	σ	Σ	Sigma
η	H	Eta	τ	T	Tau
ϑ, θ	Θ	Theta	υ	Υ	Ypsilon
ι	I	Iota	ϕ, φ	Φ	Phi
κ	K	Kappa	χ	X	Chi
λ	Λ	Lambda	ψ	Ψ	Psi
μ	M	My	ω	Ω	Omega

Das Übungsblatt kann bis spätestens Montag den 28. 11. 2022 um 16 Uhr abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen oder im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.