

## 7. ÜBUNGSBLATT ZUR LINEAREN ALGEBRA I

### Aufgabe 1. (4P)

- a) Sei  $p$  eine Primzahl und  $G := (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ . Bestimme sämtliche Gruppenendomorphismen  $\psi : G \rightarrow G$ . Welche davon sind Automorphismen?
- b) Seien  $G$  und  $H$  zwei Gruppen mit Ordnung  $\#G = 15$  und  $\#H = 42$ . Zeige, dass kein injektiver Gruppenhomomorphismus  $\phi : G \rightarrow H$  existiert.

### Aufgabe 2. (4P)

Seien  $G$  und  $H$  zwei endliche Gruppen und  $\phi : G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus.

- a) Sei  $U \leq H$  eine Untergruppe von  $H$ . Zeige, dass dann  $\phi^{-1}(U)$  eine Untergruppe von  $G$  ist.
- b) Sei nun  $\phi$  surjektiv. Zeige, dass  $\#G$  ein Vielfaches von  $\#H$  ist.  
*Hinweis: Vergleiche  $\#\text{Kern}(\phi)$  mit  $\#\phi^{-1}(\{h\})$  für ein beliebiges  $h \in H$ .*

### Aufgabe 3. (4P)

Sei  $G := \{A \in \text{GL}_3(\mathbb{R}) \mid A(i, j) = 0 \text{ für alle } i > j\}$  die Gruppe der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen mit Matrizenmultiplikation. Gib jeweils an, welche der folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind und bestimme gegebenenfalls den Kern:

a)  $\alpha : G \rightarrow \text{GL}_3(\mathbb{R})$  ,  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$

b)  $\beta : G \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R})$  ,  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & f \end{pmatrix}$

c)  $\gamma : G \rightarrow (\mathbb{R}, +)$  ,  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \mapsto b$

d)  $\delta : G \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  ,  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \mapsto a \cdot d \cdot f$

**Aufgabe 4. (4P)**

Sei  $G$  eine Gruppe und  $M \subseteq G$  eine Teilmenge.

- a) Zeige, dass die Menge

$$Z_G(M) := \{g \in G \mid gm = mg \text{ für alle } m \in M\}$$

eine Untergruppe von  $G$  ist. Diese heißt auch *Zentralisator von  $M$* .

- b) Zeige, dass die Menge

$$U := \{eg_1 \dots g_k \mid k \in \mathbb{N}_0 \text{ und für alle } i \text{ gilt } g_i \in M \text{ oder } g_i^{-1} \in M\}$$

die von  $M$  erzeugte Untergruppe ist.