



7. TUTORIUMSBLATT ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Tutoriumsaufgabe 1.

Die Diedergruppe D_n ist die Symmetriegruppe eines regelmäßigen n -Ecks, d.h. alle abstandserhaltenden Abbildungen des regelmäßigen n -Ecks auf sich selbst.

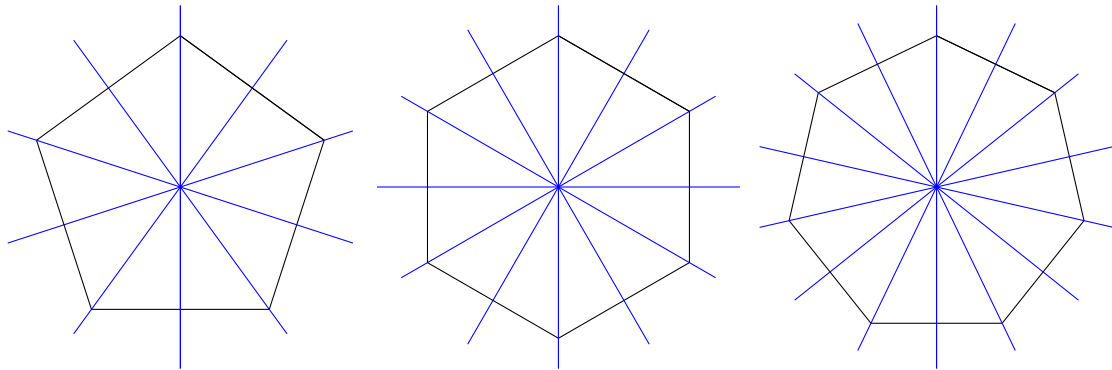


Abbildung 1: Regelmäßige 5-, 6- und 7-Ecke mit allen Spiegelachsen

- Bestimme die Anzahl der Elemente in D_n .
- Finde einen injektiven Gruppenhomomorphismus von D_n nach S_n .
kniffligere Bonusaufgabe: Zeige, dass es keinen surjektiven Gruppenhomomorphismus von S_4 nach D_4 gibt (das gilt übrigens für alle $n \geq 4$).
- Sei σ eine Spiegelung an einer beliebigen Achse und τ die Drehung um $\frac{2\pi}{n}$. Zeige, dass $D_n := \{\tau^k, \tau^k \sigma \mid k \in \mathbb{Z}\}$ gilt. Insbesondere ist D_n von einer Spiegelung und einer Drehung erzeugt.
- Was ist $\sigma \circ \tau$ in der Menge von c)? Folgere dass jedes Element in D_n Ordnung 2 oder n hat. Ist D_n zyklisch?
- Zeige, dass $D_n = \{\sigma_i, \sigma_i \sigma_j \mid \sigma_i, \sigma_j \text{ sind Spiegelungen}\}$ gilt, d.h. jedes Element in D_n lässt sich als Produkt von ein oder zwei Spiegelungen schreiben.
- Zeige, dass D_n von zwei Spiegelungen erzeugt ist.

Tutoriumsaufgabe 2.

Sei G eine Gruppe und M eine nichtleere Teilmenge. Zeige, dass M genau dann eine Untergruppe ist, wenn für alle $g, h \in M$ auch $gh^{-1} \in M$ ist.

Tutoriumsaufgabe 3.

- a) Sei $G := \langle g \rangle$ eine von $g \in G$ zyklisch erzeugte Untergruppe und H eine beliebige Gruppe. Zeige, dass jeder Gruppenhomomorphismus $\phi : G \rightarrow H$ bereits durch $\phi(g)$ eindeutig festgelegt ist.
- b) Bestimme alle Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nach \mathbb{Z} .
- c) Sei $G := \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und $H := \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Bestimme alle Gruppenhomomorphismen von H nach G und von G nach H .