



13. ÜBUNGSBLATT ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Aufgabe 1. (4P)

Wir betrachten wieder die reelle Matrix von letztem Blatt

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme alle Eigenwerte und Eigenräume von A . Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 2. (4P)

Sei \mathbb{K} ein Körper und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix mit charakteristischem Polynom $\chi_A(X) = \sum_{i=0}^n c_i X^i$.

- Zeige, dass A und A^t die gleichen Eigenwerte haben.
- Zeige, dass $\det(A) = c_0$ gilt.
- Zeige, dass für die Spur $(A) := \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ die Gleichung $\text{Spur}(A) = (-1)^{n-1} c_{n-1}$ gilt.
- Folgere, dass die Spur einer Matrix eine Ähnlichkeitsinvariante ist, d.h. sind zwei Matrizen ähnlich, dann haben sie auch die gleiche Spur.

Aufgabe 3. (4P)

Wir betrachten auf dem \mathbb{R} -Vektorraum $P_2 := \{f(X) \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f) \leq 2\}$ die Abbildung

$$\beta : P_2 \times P_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f(X), g(X)) \mapsto 3 \cdot f(0)g(1) + f(1)g(-1) + f(2)g(1).$$

- Zeige, dass β eine Bilinearform auf P_2 definiert.
- Bestimme die Gram-Matrix von β bezüglich der Basis $B := (1, X, X^2)$. Ist β symmetrisch?
- Bestimme die zu $X^2 - 2X + 1$ orthogonale Menge

$$\langle X^2 - 2X + 1 \rangle^\perp := \{f(X) \mid \beta(X^2 - 2X + 1, f(X)) = 0\}.$$

Aufgabe 4. (4P+2Bonuspunkte)

Sei \mathbb{K} ein Körper und V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Bilinearform $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *ausgeartet*, wenn ein $v \in V \setminus \{0\}$ existiert, sodass $\beta(v, w) = 0$ für alle $w \in V$ gilt.

- Sei V endlich-dimensional mit geordneter Basis B . Zeige, dass eine Bilinearform genau dann ausgeartet ist, wenn die Gram-Matrix nicht invertierbar ist.
- Sei β symmetrisch und nicht ausgeartet und $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$. Zeige, dass es einen Vektor $v \in V$ mit $\beta(v, v) \neq 0$ gibt.
- Finde eine symmetrische Bilinearform $\beta : \mathbb{F}_2^2 \times \mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ die symmetrisch und nicht ausgeartet ist, aber für die $\beta(v, v) = 0$ für alle $v \in \mathbb{F}_2^2$ gilt.

Aufgabe 5. (1+3+2 Bonuspunkte)

Wir betrachten die Hasen- und Fuchspopulation in einem Gebiet. Hierbei sei H_n die Hasenpopulation und F_n die Fuchspopulation nach n Jahren seit Beobachtungsbeginn. Wir modellieren das jährliche Wachstum mit den Formeln:

$$\begin{aligned}H_{n+1} &:= 3 \cdot H_n - H_{n-1} - 2 \cdot F_n \\F_{n+1} &:= 2 \cdot F_n\end{aligned}$$

Das heißt jedes Jahr verdreifachen sich die Hasen, wovon jeder Fuchs zwei (junge) Hasen frisst und die alten Hasen eines anderen natürlichen Todes sterben. Die Füchse verdoppeln jedes Jahr ihre Population, solange es genügend Hasen zum Fressen gibt.

- Sei $H_1 = 90$ und $F_1 = 10$ die anfängliche Population (also ohne alte Hasen). Beweise für die Populationen im Jahre n die Formel

$$\begin{pmatrix} H_{n+1} \\ F_{n+1} \\ H_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 90 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wie müsste das Hasen zu Fuchsverhältnis sein, damit sich beide Populationen jedes Jahr verdoppeln?
- Finde eine explizite Formel für H_n . Wie bewertest Du die Modellierung des Wachstums?