

11. ÜBUNGSBLATT ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Während des gesamten Blattes bezeichnet \mathbb{K} einen Körper.

Aufgabe 1. (4P)

- a) Wir betrachten den \mathbb{R} -Vektorraum der reellen Polynome $\mathbb{R}[X]$ zusammen mit dem Untervektorraum $U := \{f(X) \in \mathbb{R}[X] \mid f(1) = f(2)\}$. Zeige, dass $\mathbb{R}[X]/U \cong \mathbb{R}$ gilt.

Hinweis: Benutze eine geeignete Abbildung $\phi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ und den Homomorphiesatz.

- b) Wir betrachten die Untervektorräume

$$U := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Zeige, dass \mathbb{R}^4 die direkte Summe von U, V und W ist.

Aufgabe 2. (4P)

Wir betrachten von letztem Blatt die folgenden Vektoren in \mathbb{K}^3

$$v_1 := \begin{pmatrix} \bar{1} \\ -\bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} -\bar{2} \\ \bar{2} \\ \bar{1} \end{pmatrix}.$$

Gib jeweils für $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5$ und \mathbb{F}_7 an, ob es eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ mit folgenden Werten gibt:

$$\phi(v_1) = v_2, \quad \phi(v_2) = v_3, \quad \phi(v_3) = -v_1$$

Aufgabe 3. (4P)

Sei $P_3 := \{f(X) \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f(X)) \leq 3\}$ der \mathbb{R} -Vektorraum der Polynome von Grad kleiner gleich 3.

- a) Zeige, dass die Ableitungsabbildung

$$\text{der} : P_3 \rightarrow P_3, \quad f(X) \mapsto f'(X)$$

eine lineare Abbildung ist und bestimme die Darstellungsmatrix bezüglich einer Basis Deiner Wahl.

- b) Beschreibe die folgende Differentialgleichung als lineares Gleichungssystem in P_3 und finde die Lösungsmenge in P_3 :

$$f(X) = f'(X) \cdot (X + 1) + 1.$$

Aufgabe 4. (4P)

- a) Zeige, dass jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ äquivalent zu einer Matrix der Form $\left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right)$ ist.
- b) Seien V und W zwei endlich-dimensionale \mathbb{K} -Vektorräume und $\phi : V \rightarrow W$ eine \mathbb{K} -lineare Abbildung. Zeige, dass es Basen $B \subseteq V$ und $C \subseteq W$ gibt, sodass die Darstellungsmatrix die Blockgestalt

$$D_{CB}(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right)$$

mit $r = \text{Rang}(\phi)$ hat. Hierbei bezeichnet $\mathbf{0}$ Nullmatrizen der entsprechenden Größen.

Aufgabe 5. (2 Bonuspunkte)

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\psi : \mathbb{K}^{3 \times 2} \rightarrow \mathbb{K}^{2 \times 2}, \quad A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot A.$$

Bestimme $D_{C,B}(\psi)$ bezüglich Basen B von $\mathbb{K}^{3 \times 2}$ und C von $\mathbb{K}^{2 \times 2}$ Deiner Wahl.