

## 8. ÜBUNGSBLATT ZUR LINEAREN ALGEBRA I

### Aufgabe 1. (4P)

- a) Schreibe die folgende Permutation in Zykelschreibweise und bestimme ihr Signum:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 7 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- b) Zeige, dass  $S_n$  von dem  $n$ -Zykel  $(1\ 2\ \dots\ n)$  und der Transposition  $(1\ 2)$  erzeugt wird, d.h. es gilt  $S_n = \langle (1\ 2\ \dots\ n), (1\ 2) \rangle$ .

*Hinweis: Bestimme  $(1\ 2\ \dots\ n) \circ (1\ 2) \circ (1\ 2\ \dots\ n)^{-1}$ .*

### Aufgabe 2. (6 Bonuspunkte)

Ferdinand möchte mit seinen Freunden wichteln. Dazu legt jeder einen Zettel mit seinem Namen in einen Beutel, die anschließend verteilt werden. Während des Abends gibt jeder das Geschenk, das er gerade hat bzw. zu Anfang mitgebracht hat, an denjenigen weiter, den er am Anfang des Abends gezogen hat. Das passiert einige Male, wobei Dohlis feststellt, dass bis auf das erste Mal jedes Mal jemand sein ursprüngliches Geschenk wieder selbst bekommen hat. Nachdem dies sieben Mal in Folge passiert ist, fragt sie daher Ferdinand, ab wann denn jeder ein fremdes Geschenk bekommt. „Das ist ganz einfach! Da wir weniger als zwei Dutzend sind, kann es nicht mehr lange dauern.“ worauf nach wenigen weiteren Wechseln tatsächlich jeder ein fremdes Geschenk in den Flügeln hält. Wie viele Freunde hat Ferdinand mindestens eingeladen und wie viele solcher Täusche wären nötig, damit jeder sein eigenes Geschenk zurück bekommt?

Bei dem ganzen Wichteln stellte sich die folgende Frage: Wie hoch ist die Chance, dass beim Wichteln mit 5 weiteren Freunden niemand sich selbst zieht?

### Aufgabe 3. (4P)

Sei  $M$  eine Menge. Wir erinnern uns an Blatt 6, dass  $\mathcal{P}(M)$  zusammen mit der symmetrischen Differenz

$$\Delta : \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M) \quad , \quad (U, V) \mapsto U \Delta V := (U \cup V) \setminus (U \cap V)$$

eine abelsche Gruppe bildet.

- a) Zeige, dass wenn wir den Schnitt als Multiplikation nehmen  $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cap)$  zu einem kommutativen Ring mit Eins wird. Was ist seine Charakteristik und seine Einheitengruppe?
- b) Sei  $N \subset M$  eine Teilmenge. Zeige, dass die Abbildung

$$\phi : (\mathcal{P}(M), \Delta, \cap) \rightarrow (\mathcal{P}(N), \Delta, \cap) \quad , \quad U \mapsto U \cap N$$

ein Ringhomomorphismus ist. Was ist der Kern von  $\phi$ ?

**Aufgabe 4. (4P)**

Wir betrachten die Teilmenge  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$ .

- a) Zeige, dass  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  mit der üblichen Multiplikation und Addition ein Ring ist.
- b) Finde eine weitere Einheit  $x \neq \pm 1$  in  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ .
- c) Zeige, dass  $\sqrt{2}$  irrational ist, d.h. es gilt  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . Folgere daraus, dass die Darstellung  $a + b\sqrt{2}$  eindeutig ist, d.h. für jedes Element  $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  gibt es genau ein Tupel  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  mit  $x = a + b\sqrt{2}$ .
- d) Zeige, dass die Abbildung

$$\phi : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad , \quad a + b\sqrt{2} \mapsto \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ein Ringhomomorphismus ist.

**Aufgabe 5. (4P)**

- a) Seien  $(R, +, \cdot)$  und  $(S, +, \cdot)$  zwei Ringe. Zeige, dass ihr Produkt  $R \times S$  mit punktweiser Verknüpfung  $(r, s) + (r', s') := (r + r', s + s')$  und  $(r, s) \cdot (r', s') := (r \cdot r', s \cdot s')$  wieder ein Ring ist. Was sind die Einheiten von  $R \times S$ ?
- b) Zeige, dass die Charakteristik von  $R \times S$  das kleinste gemeinsame Vielfache der Charakteristiken von  $R$  und  $S$  ist.