



## 4. TUTORIUMSBLATT ZUR LINEAREN ALGEBRA I

### Tutoriumsaufgabe 1.

Sei  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Zeige oder widerlege ob die folgenden Mengen Untervektorräume von  $\mathbb{R}^{n \times n}$  sind:

- a)  $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{Spur}(A) := \sum_{i=1}^n A(i, i) = 0\}$ .
- b)  $\text{GL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\}$ .
- c)  $Z(B) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \cdot B = B \cdot A\}$ .
- d)  $K(B) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \cdot B = 0\}$ .

### Tutoriumsaufgabe 2.

Gegeben seien die drei Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Produkte sind möglich? Berechne gegebenenfalls diese:

- |                |                        |
|----------------|------------------------|
| a) $A \cdot A$ | e) $C \cdot A$         |
| b) $A \cdot B$ | f) $A \cdot B \cdot C$ |
| c) $A \cdot C$ | g) $B \cdot C \cdot A$ |
| d) $B \cdot C$ | h) $B \cdot A \cdot B$ |

### Tutoriumsaufgabe 3.

Für eine Permutation  $\sigma \in \text{Perm}(n)$  betrachten wir die Matrix

$$V_\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{mit} \quad V_\sigma(i, j) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i = \sigma(j) \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

a) Was ist  $V_\sigma$  für

$$\sigma : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, \quad \begin{cases} 1 \mapsto 4 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \\ 4 \mapsto 2 \end{cases}$$

b) Wir bezeichnen mit  $e_i \in \mathbb{R}^n$  den  $i$ -ten Einheitsvektor mit einer 1 an der  $i$ -ten Stelle und sonst nur Nullen. Was ist  $V_\sigma \cdot e_i$ ?

### Tutoriumsaufgabe 4.

Wir bezeichnen mit

$$\Delta_n := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \forall i > j : A(i, j) = 0\}$$

die Menge der oberen Dreiecksmatrizen, d.h. alles links unterhalb der Diagonalen ist Null.

Zeige, dass  $\Delta_n$  abgeschlossen unter der Matrizenmultiplikation ist, sprich für alle  $A, B \in \Delta_n$  folgt auch bereits  $A \cdot B \in \Delta_n$ .

### Tutoriumsaufgabe 5.

Bestimme die Inverse der folgenden Matrizen

$$A := \text{diag}(1, 2, 3) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$