

3. TUTORIUMSBLATT ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Tutoriumsaufgabe 1.

Sei M eine Menge mit zwei Äquivalenzrelationen „ \sim_1 “ und „ \sim_2 “. Wir betrachten die Relation

$$x \sim y : \Longleftrightarrow x \sim_1 y \wedge x \sim_2 y.$$

- a) Zeige, dass „ \sim “ eine Äquivalenzrelation ist.
- b) Zeige für die Äquivalenzklassen folgende Gleichheit:

$$[x]_{\sim} = [x]_{\sim_1} \cap [x]_{\sim_2}.$$

Tutoriumsaufgabe 2.

Wir betrachten auf \mathbb{Z} die Äquivalenzrelation

$$x \equiv_{42} y : \Longleftrightarrow 42 \mid x - y$$

und bezeichnen mit $\mathbb{Z}/42\mathbb{Z} := (\mathbb{Z}/\equiv_{42})$ die Menge der Äquivalenzklassen.

- a) Zeige, dass die Vorschrift

$$\phi : \mathbb{Z}/42\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/42\mathbb{Z} \quad , \quad [x]_{\equiv_{42}} \mapsto [6 \cdot x]_{\equiv_{42}}$$

eine wohldefinierte Abbildung ist.

- b) Zeige, dass die Vorschrift

$$\psi : \mathbb{Z}/42\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad , \quad [x]_{\equiv_{42}} \mapsto 6 \cdot x$$

KEINE Abbildung (bzw. Quatsch) ist.

Tutoriumsaufgabe 3.

Seien N und M zwei Mengen und $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Wir definieren auf M die Relation

$$xRy : \Longleftrightarrow f(x) = f(y).$$

Zeige, dass R eine Äquivalenzrelation ist. Was sind die Äquivalenzklassen?

Tutoriumsaufgabe 4.

Wir betrachten die Menge $M := \{a, b, c\}$. Finde jeweils eine Relation R_i auf M die folgende Eigenschaften erfüllt:

- a) reflexiv, aber weder symmetrisch, antisymmetrisch noch transitiv
- b) antisymmetrische Totalordnung
- c) symmetrisch, aber weder reflexiv noch transitiv
- d) transitiv, aber weder reflexiv, symmetrisch oder antisymmetrisch

x	y	a	b	c
a				
b				
c				

x	y	a	b	c
a				
b				
c				

x	y	a	b	c
a				
b				
c				

x	y	a	b	c
a				
b				
c				

Fülle jeweils eine 1 in die Zelle der obigen Tabelle, wenn x und y in Relation stehen und 0, wenn sie nicht in Relation stehen. Was fällt Dir auf in Bezug auf reflexiv, symmetrisch und antisymmetrisch?

Tutoriumsaufgabe 5.

Welche der folgenden Teilmengen sind \mathbb{R} -Vektorräume mit der üblichen Addition und Multiplikation:

- a) $M_1 := \{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(42) = 0\}$
- b) $M_2 := \{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 42\}$
- c) $M_3 := \{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(42) = f(0)\}$
- d) $M_4 := \{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$
- e) $M_5 := \{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid |f(x)| \leq |x| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$