



13. TUTORIUMSBLATT ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Tutoriumsaufgabe 1.

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Bestimme das charakteristische Polynom von A über \mathbb{R} .
- Bestimme die Eigenwerte und Eigenräume von A über den Körpern $\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_{11}, \mathbb{Q}$ und \mathbb{R} .
- Über welchen von den Körpern aus b) ist A diagonalisierbar?
- Berechne A^{42} über \mathbb{R} .

Tutoriumsaufgabe 2.

Gegeben sei das reelle Polynom $f(X) = X^4 + X^3 - 9X^2 + 5X + 2$.

- Zeige, dass 1 und 2 Nullstellen von $f(X)$ sind.
- Bestimme sämtliche reellen Nullstellen von $f(X)$.

Tutoriumsaufgabe 3.

- Bestimme die Determinante der folgenden Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 7 & 4 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

- Zeige, dass 1 ein Eigenwert der folgenden Matrix B ist:

$$B := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tutoriumsaufgabe 4.

Wir betrachten den \mathbb{R} -Vektorraum $P_2 := \{f(X) \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f(X)) \leq 2\}$ der Polynome von Grad kleiner gleich 2 zusammen mit der Abbildung:

$$\beta : P_2 \times P_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f(X), g(X)) \mapsto \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

- a) Zeige, dass β eine symmetrische Bilinearform ist.
- b) Bestimme die Gram-Matrix von β bezüglich der Basis $B := (1, X, X^2)$.
- c) Berechne den zu $3 + X^2$ orthogonalen Raum

$$\langle 3 + X^2 \rangle^\perp := \{f(X) \in \mathbb{R}[X] \mid \beta(3 + X^2, f(X)) = 0\}.$$

- d) Finde eine Orthonormalbasis $B' \subseteq P_2$ bezüglich β .
- e) Berechne mit Hilfe der Fourier-Formel die Basiswechselmatrix $D_{B'C}$ für die Basis $C := (1 + X, 1 - X, 1 + X + X^2)$.
- f) Bestimme die Gram-Matrix von β bezüglich der Basis C .

Tutoriumsaufgabe 5.

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Bilinearform $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$.

- a) Sei weiterhin β symmetrisch und $v, w \in V \setminus \{0\}$ mit $\beta(v, v) \neq 0$. Zeige dass der Vektor $w' := w - \frac{\beta(v, w)}{\beta(v, v)} \cdot v$ orthogonal zu v ist.
- b) Zeige, dass die Abbildung definiert durch $\gamma(v, w) := 1/2(\beta(v, w) + \beta(w, v))$ eine symmetrische Bilinearform ist. Beschreibe die Gram-Matrix von γ mit Hilfe der Gram-Matrix von β .

Eine Bilinearform heißt *schiefssymmetrisch*, wenn $\beta(v, w) = -\beta(w, v)$ gilt.

- c) Zeige, dass für eine schiefssymmetrische Bilinearform β und $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ für alle $v \in V$ bereits $\beta(v, v) = 0$ gilt.
- d) Zeige, dass jede Bilinearform als Summe einer symmetrischen und einer schiefssymmetrischen Bilinearform geschrieben werden kann.