



### 3. ÜBUNGSBLATT ZUR LINEAREN ALGEBRA I

#### Aufgabe 1. (4P)

Wir betrachten auf der Menge  $Q := \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  die folgende Relation:

$$(p, q) \sim (r, s) : \iff p \cdot s = q \cdot r.$$

- Zeige, dass „ $\sim$ “ eine Äquivalenzrelation ist.
- Finde eine Bijektion zwischen  $Q/\sim$  und  $\mathbb{Q}$  und zeige dass es sich tatsächlich um eine Bijektion handelt.

#### Aufgabe 2. (2P+1P+1P)

Sei  $M$  eine Menge und  $\{M_i\}_{i \in I}$  eine Familie von Teilmengen  $M_i \subseteq M$ . Wir definieren auf  $M$  die Relation

$$xRy : \iff \exists i \in I : x \in M_i \wedge y \in M_i.$$

Zeige die folgenden Aussagen:

- $M = \bigcup_{i \in I} M_i \iff R$  ist reflexiv.
- Alle  $M_i$  sind disjunkt  $\implies R$  ist transitiv.
- Ist  $\{M_i\}_{i \in I}$  eine Partition von  $M$  (s. Blatt 2), dann ist  $R$  eine Äquivalenzrelation.

#### Aufgabe 3. (4P)

Sei  $M$  eine endliche Menge und  $\sigma \in \text{Perm}(M)$  eine Permutation von  $M$ .

- Zeige, dass ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\sigma^k = \text{id}_M$  existiert.
- Wir definieren auf  $M$  die Relation

$$x \sim_\sigma y : \iff \exists n \in \mathbb{N} : \sigma^n(x) = y.$$

Zeige, dass „ $\sim_\sigma$ “ eine Äquivalenzrelation ist.

#### Aufgabe 4. (4P)

Sei  $(V, +, \cdot, 0_V)$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\lambda \in \mathbb{R}, v \in V$  beliebig. Zeige die folgenden Aussagen mit Hilfe der Vektorraumaxiome:

- $(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$
- $0 \cdot v = 0_V$
- $\lambda \cdot v = 0_V \iff v = 0_V \vee \lambda = 0$
- $\forall u \in V : \exists! w \in V : u + w = v$ . Insbesondere ist der Nullvektor eindeutig.

---

Das Übungsblatt kann bis spätestens Montag den 21. 11. 2022 um 16 Uhr abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen oder im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen. Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.