

9. ÜBUNGSBLATT ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Aufgabe 1. (1P+1P+2P)

- a) Sei \mathbb{K} ein Körper und $k \subseteq \mathbb{K}$ ein Teilkörper. Zeige, dass \mathbb{K} mit der üblichen Multiplikation und Addition ein k -Vektorraum ist.
- b) Sei V ein \mathbb{F}_p -Vektorraum mit Basis $b_1, \dots, b_n \in V$. Wie viele Elemente enthält V ?
- c) Sei \mathbb{K} ein endlicher Körper. Zeige, dass die Anzahl der Elemente in \mathbb{K} eine Primzahlpotenz p^r ist.

Aufgabe 2. (4P)

Se \mathbb{K} ein Körper, V und W zwei \mathbb{K} -Vektorräume und $\phi : V \rightarrow W$ ein \mathbb{K} -Vektorraumhomomorphismus. Seien weiterhin $v_1, \dots, v_n \in V$ Vektoren und $w_1 := \phi(v_1), \dots, w_n := \phi(v_n) \in W$ ihre Bilder.

- a) Zeige, dass wenn w_1, \dots, w_n linear unabhängig sind, dann sind auch bereits v_1, \dots, v_n linear unabhängig.
- b) Seien nun $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V . Zeige, dass ϕ genau dann injektiv ist, wenn w_1, \dots, w_n linear unabhängig sind.