

6. ÜBUNGSBLATT ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Aufgabe 1. (4P)

Gegeben seien die beiden Untervektorräume

$$V := \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$W := \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}$$

- a) Berechne den Schnitt $V \cap W$.
- b) Zeige, dass $V + W = \mathbb{R}^4$ gilt.

Aufgabe 2. (4P)

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimme die Lösungsmenge des LGS.
- b) Schreibe das Inverse A^{-1} als Produkt von Additions-, Vertauschungs- und Multiplikationsmatrizen.

Aufgabe 3. (1.5P+1.5P+1P)

Sei $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix. Wir betrachten die Gleichung

$$AX + X^t A^t = B$$

für Matrizen $X, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- a) Für welche $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die Gleichung lösbar?
- b) Sei nun $B = 0$ die Nullmatrix. Finde eine Lösung $X \neq 0$ und gib die homogene Lösungsmenge in geeigneter Weise an.
- c) Begründe, dass die obige Gleichung ein lineares Gleichungssystem ist und bestimme den Rang des Gleichungssystems für $n = 2$.

Aufgabe 4. (3P+1P)

- a) Sei M eine Menge. Wir betrachten auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ die folgende Verknüpfung:

$$\Delta : \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M) \quad , \quad (U, V) \mapsto U \Delta V := (U \cup V) \setminus (U \cap V)$$

Zeige, dass $\mathcal{P}(M)$ zusammen mit „ Δ “ zu einer Gruppe wird.

- b) Sei (G, \star) eine Gruppe, in der jedes Element Ordnung zwei hat, d.h. es gilt $g \star g = e$ für alle $g \in G$. Zeige, dass dann (G, \star) abelsch ist.